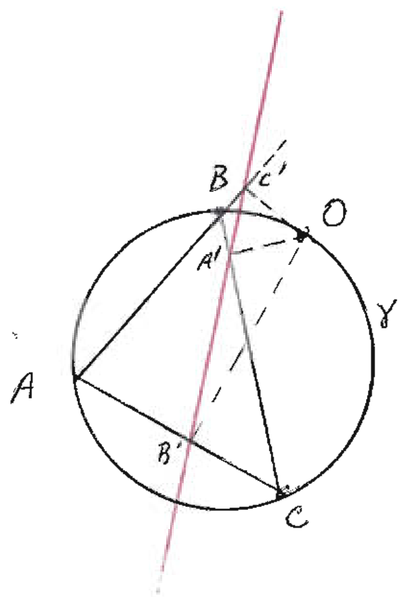
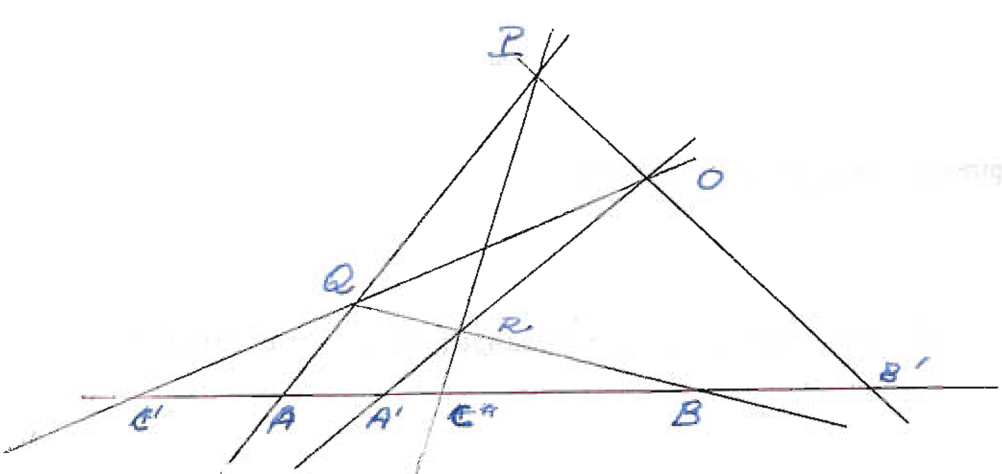
Teo. di Simpson.

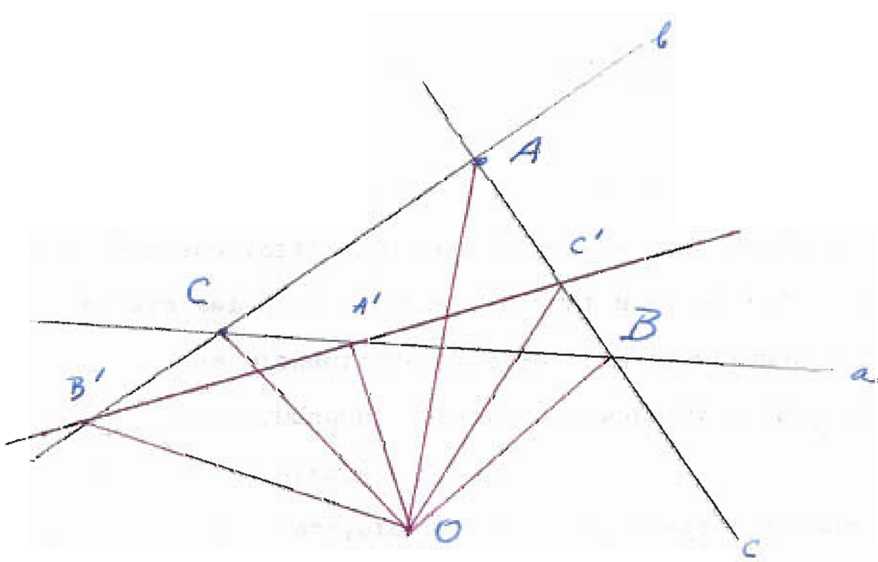


Sia ABC un triangolo, γ la circonf. circoscritta, O un punto di γ. Siano A', B', C' i tre piedi delle perpendicolari calate da O sui lati BC, CA, AB rispettivamente. I tre punti A', B', C' sono collineari.

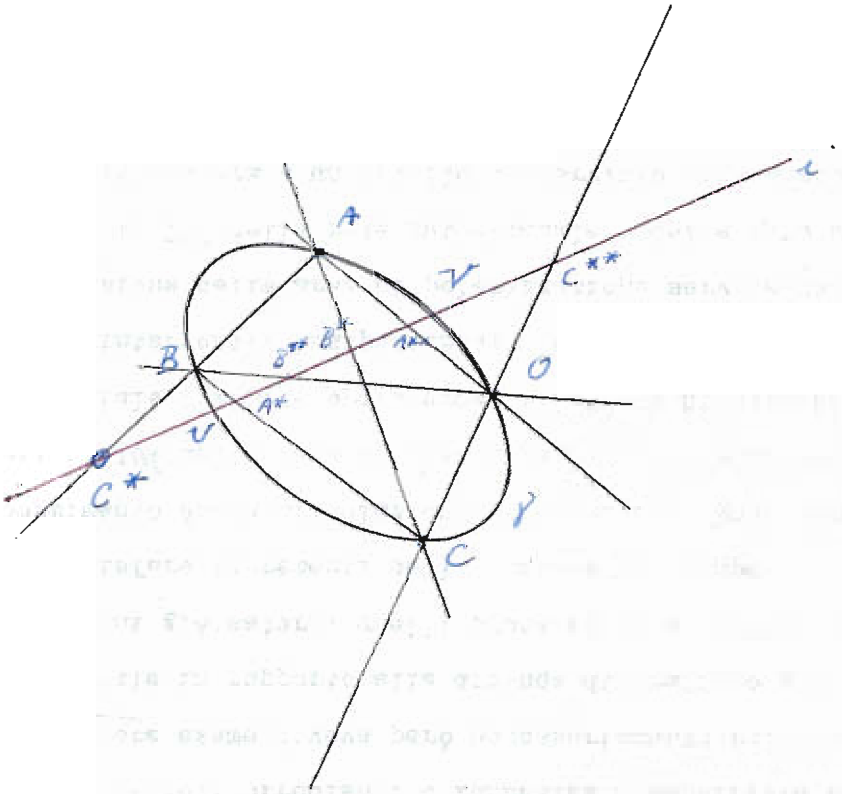
Dim. proiettiva.



dal Teo. del quadrangolo. Sia PQR un triangolo e siano A, B, C i punti di intersezione di PQ, QR, RP con una retta r. Siano poi A', B', C' i corrispondenti di A, B, C in una involuzione. Congiunti A' con R, B' con P, C' con Q, le tre congiungenti passano per un punto O, che insieme con P, Q, R forma un quadrangolo ...



Dualmente, siano ABC i vertici di un trilatero, di cui a, b, c sono i lati come in figura. Proiettiamo A, B, C da un punto O, prendiamo le corrispondenti delle rette in una involuzione, e intersechiamole rispettivamente con a, b, c si otterranno tre punti A', B', C' allineati su una retta o che formano con a, b, c un quadrilatero.



Sia ora γ la circonferenza, i la retta impropria, U, V i punti ciclici. $ABCO$ un quadrangolo su γ.

Chiamiamo A^* l'intersezione di i con BC e A^{**} l'intersezione di i con AO. Ed analogamente. Le coppie A^*A^{**}, B^*B^{**}, C^*C^{**} si corrispondono in una involuzione su i, a cui appartengono anche U, V.

Sia $\bar{A}$ il coniugato armonico di A^* rispetto ad U, V ed analogamente. Allora anche A^{**} ed $\bar{A}$, B^{**} e $\bar{B}$, C^{**} e $\bar{C}$ si corrispondono in una involuzione. (*)

Proiettando $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ da O si ottengono i piedi delle perpendicolari che sono allineati, per il Teo di Desargues.

(*) Siano α, β due involuzioni e la coppia di punti uniti di β sia coniugata nella α. Allora anche $\alpha \cdot \beta$ è una involuzione.

Dim.

$$\alpha \equiv \quad xx' = K$$

$$\beta \equiv \quad x'' + x' = 0$$

$$\alpha\beta \equiv \quad xx'' = -K$$

Teo di Simpson.

Verifica analitica.

Essendo la proprietà di carattere proiettivo, verifichiamola per una conica particolare.

(1) $\Gamma]$ $\quad xy = 1$

parametrizzata

(2) $P \equiv]$ $\quad x = \tau \; ; \; y = 1/\tau .$

Presi su γ 3 punti A, B, C dati da

$A \equiv (\alpha, 1/\alpha) \; ; \; B \equiv (\beta ; 1/\beta) \; ; \; C \equiv (\gamma, 1/\gamma)$

la retta $\langle AB \rangle$ ha equazione

(3) $$x + y\alpha\beta = \alpha + \beta$$

Gli altri lati del triangolo si ottengono con permutazione circolare nelle lettere α, β, γ.

La retta $\langle PC \rangle$ è

(4) $x + y\tau\gamma = \tau + \gamma .$

Il quadrangolo $ABCP$ seca coi suoi lati nelle rette impropria la involuzione

(5) $$m m' = 1/\alpha\beta\gamma\tau$$

nella quale sono coniugati i punti impropri della Γ

La involuzione

(6) $\qquad m + m' = 0$

è permutabile con la (5) (Cfr. pg. 4)

La retta per P che sega sulla retta impropria il punto associato nella (6) della (4) è

(7) $\qquad x - y\tau\gamma = \tau - \gamma$

Il punto comune a (3) e (6) ha coordinate

(8) $$\begin{cases} x = \dfrac{\tau(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \tau\gamma} \\[2ex] y = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma - \tau}{\alpha\beta + \tau\gamma} \end{cases}$$

Circolando sulle lettere (α, β, γ) si ottengono 3 punti il cui allineamento si verifica immediatamente.

Definizione

La circonferenza

$$(9) \qquad x^2+y^2=1 \qquad x,y \in \mathbb{R}$$

può essere scritta nella forma

$$(10) \qquad XY=1$$

ponendo

$$(11) \qquad X=x+iy \; ; \; Y=x-iy \; ; \; |X|=|Y|=1$$

avendosi nella ipotesi

$$(12) \qquad Y=1/X$$

Possiamo parametrizzare

$$(13) \qquad X=\tau_1+i\tau_2 \; ; \; Y=\tau_1-i\tau_2$$

$$\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \; ; \; \tau_1^2+\tau_2^2=1$$

Posto

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha=\alpha_1+i\alpha_2 & \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} & |\alpha|=1 \\ \beta=\beta_1+i\beta_2 & \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} & |\beta|=1 \\ \gamma=\gamma_1+i\gamma_2 & \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} & |\gamma|=1 \end{cases}$$

$$A \equiv (\alpha, 1/\alpha) \qquad B \equiv (\beta, 1/\beta) \qquad C \equiv (\gamma, 1/\gamma)$$

La retta $<AB>$ ha equazione analoga alla (3)

$$(15) \qquad X+Y\alpha\beta=\alpha+\beta.$$

Separando il reale dall'immaginario abbiamo due forme della equazione della retta <AC>

$$
\begin{cases}
x\left\{1 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2\right\} + y(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = \alpha_1 + \beta_1 & (16)\\
y\left\{1 - \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right\} + x(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = \alpha_2 + \beta_2 & (17)
\end{cases}
$$

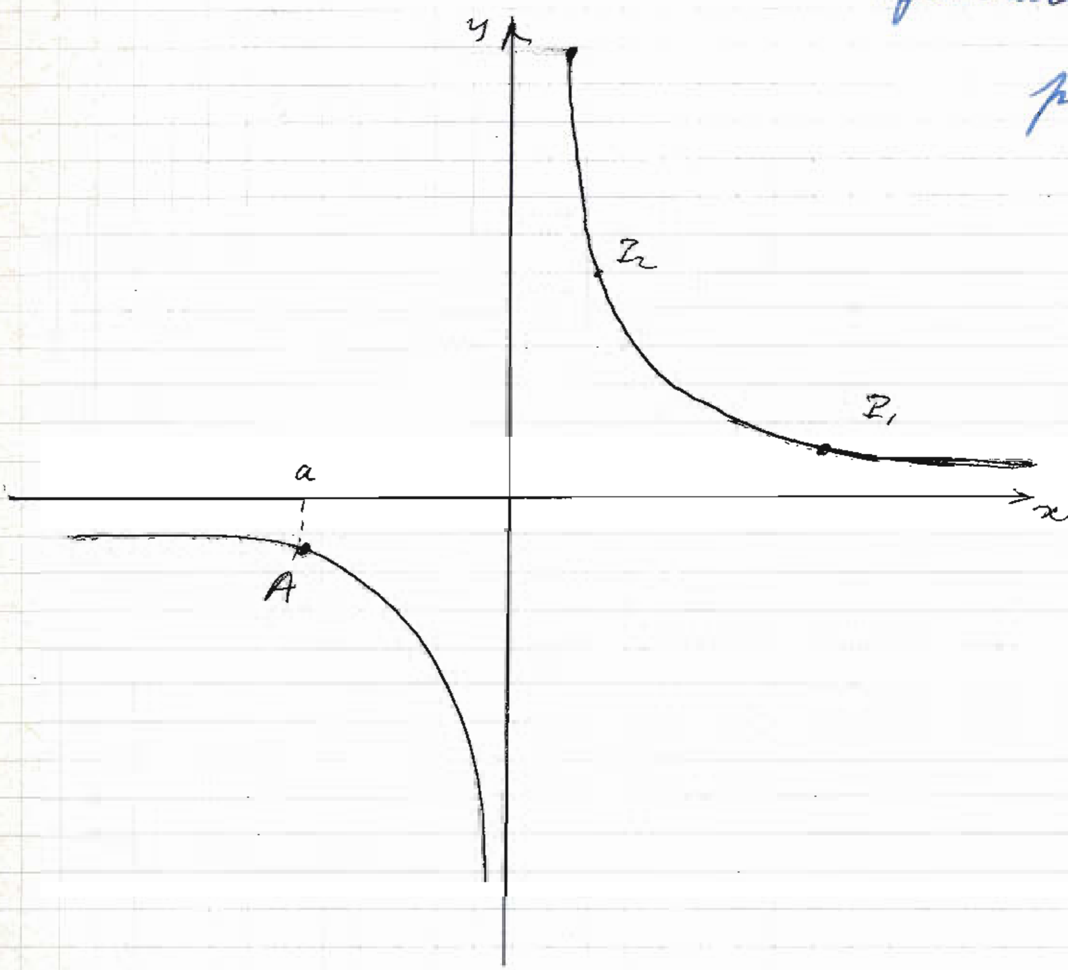
Tenendo sempre conto delle ipotesi

$$|\alpha| = |\beta| = 1$$

C.Ci.

Teo. di Simpson.

Generalizzazione proiettiva.



È data una conica γ ed una retta r che interseca γ in due punti X, Y.
Sia I la involuzione dei punti coniugati su r (quella che ha $X\,Y$ come punti uniti).
Siano $P_i \in \gamma$ $(i = 1, 2, 3)$ tre vertici di un triangolo coi vertici su γ.
Poniamo.

$$Q_{i\,i+1} = r \cap P_i P_{i+1}$$

e siano R_{i+2} i punti di r
coniugati di Q_{i+2} rispetto ad I.
Scelto $A \in \gamma$, congiungiamo A con
i punti R_{i+2} e sia

$$T_{i+2} = AR_{i+2} \cap P_iP_2$$

Teo I tre punti $T_1 T_2 T_3$ sono
allineati.

Oss. 1 Se r è la retta impropria,
XY sono i punti ciclici, γ è
una circonferenza e si ottiene
il Teo di Simpson.

Oss 2. La proprietà è proiettiva
e dunque basta una verifica
in un caso particolare.
Scegliamo come r la retta
impropria. Sia

(1) $\gamma)\quad xy = 1$

(2) $\begin{cases} P_i \equiv (x_i, 1/x_i) & i = 1,2,3 \\ \forall i \; (x_i \neq 0 \end{cases}$

(3) $A \equiv (a, 1/a) \qquad a \neq 0.$

Retta P_1P_2.

$$\begin{cases} x + y\, p_{12} = s_{12} & (4) \\ p_{12} = x_1 x_2 \;;\; s_{12} = x_1 + x_2 & (5) \end{cases}$$

Coefficiente angolare.

(6) $m_{12} = -1/p_{12} \qquad$ (punto Q_3)

Involuzione I

(7) $m'_{12} + m_{12} = 0 \qquad$ (punto R_3)

Retta AR_3

(8) $x = p_{12}\, y + a - p_{12}/a$

Punto T_3: intersezione (4), (8)

$$T_3 \begin{cases} 2x_3 = s_{12} + a - p_{12}/a & (9) \\ 2y_3 = \dfrac{1}{p_{12}} \left\{ s_{12} - a + p_{12}/a \right\} & (10) \end{cases}$$

Allineamento dei tre punti T_1, T_2, T_3.

Dalle (9) e (10) (dimenticando il coefficiente 2); valutiamo il determinante della matrice

$$
(11) \qquad \begin{bmatrix}
x_1+x_2+a - \dfrac{x_1x_2}{a} & \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{a}{x_1x_2} + \dfrac{1}{a} & 1 \\[2ex]
x_2+x_3+a - \dfrac{x_2x_3}{a} & \dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3} - \dfrac{a}{x_2x_3} + \dfrac{1}{a} & 1 \\[2ex]
x_3+x_1+a - \dfrac{x_3x_1}{a} & \dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{a}{x_3x_1} - \dfrac{1}{a} & 1
\end{bmatrix}
$$

Sottragghiamo dalla 1ª colonna la III moltiplicata per 2a. e dalla II la III moltiplicata per 2/a. moltiplichiamo le prime due colonne per $-a$ ed otteniamo

$$
(12) \qquad \begin{bmatrix}
(x_1-a)(x_2-a) & (1-a/x_1)(1-a/x_2) & 1 \\
(x_2-a)(x_3-a) & (1-a/x_2)(1-a/x_3) & 1 \\
(x_3-a)(x_1-a) & (1-a/x_3)(1-a/x_1) & 1
\end{bmatrix}
$$

La matrice ha un determinante che è una funzione alternante di x_1, x_2, x_3.

I minori della matrice $(3,2)$ della 1^a e III colonna sono.

$$(13)\quad \begin{cases} (x_2-a)(x_1-x_3) \\ (x_3-a)(x_2-x_1) \\ (x_1-a)(x_3-x_2) \end{cases}$$

Quelli della matrice $(3,2)$ della II e III colonna sono gli stessi, a meno del fattore $a\, x_1 x_2 x_3$.

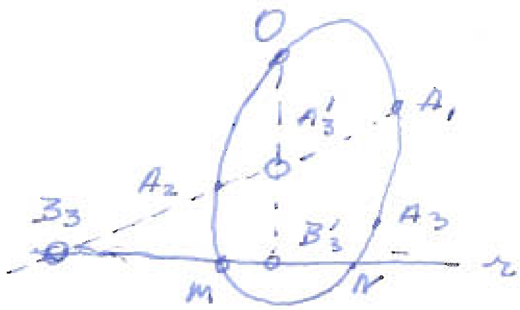
Dunque le righe, moltiplicate per le tre espressioni (13) e sommate danno zero. Q.E.D.

Oss. 3. La γ con la trasformazione

$$\begin{cases} x = \xi + i\eta \\ y = \xi - i\eta \end{cases}$$

diventa una circonferenza. &c.

TEO. DI SIMPSON proiettivo



Sono dati 6 punti su una conica γ: M, N, O, A_1, A_2, A_3.
Sulla retta $r = \langle M, N \rangle$ è data quindi l'involuzione $\mathcal{I}$, determinata dai punti uniti M, N.

Sia $B_{i+2} = \langle M, N \rangle \cap \langle A_i, A_{i+1} \rangle$ $i = 1, 2, 3$ il punto di intersezione tra r e il lato $\langle A_i, A_{i+1} \rangle$ e sia B'_{i+2} il coniugato armonico di B_{i+2} rispetto alla coppia M, N, cioè il corrispondente di B_{i+2} nella $\mathcal{I}$. Sia infine

$$A'_{i+2} = \langle O\, B'_{i+2} \rangle \cap \langle A_i, A_{i+1} \rangle$$

la proiezione da O di B'_{i+2} sul lato $\langle A_i A_{i+1} \rangle$ del triangolo $\langle A_i A_{i+1} A_{i+2} \rangle$.

Teo. I tre punti A'_i, A'_{i+1}, A'_{i+2} sono allineati.

Do una dimostrazione analitica, perché non sono stato capace di trovarne una sintetica elegante.

Mettiamo la γ in forma canonica

(1) $\gamma \equiv \{ xy = 1 \}$

e poniamo

(2) $O \equiv (1,1)$

La cosa è lecita, perché la proprietà che si vuol dimostrare è invariante proiettiva, e tre punti (M, N, O nella fattispecie) di una conica non hanno invarianti.

Parametrizziamo la γ col parametro t, ponendo

(3) $x = t \; ; \; y = 1/t$.

Quindi avremo, per esempio

(4) $A_1 = (t_1, 1/t_1) \; ; \; A_2 = (t_2, 1/t_2)$

$(t_1 - 1)(t_2 - 1) \neq 0$.

102591 M

Sia

(5) $$y = mx + q$$

l'equazione della retta $\langle A_1 A_2 \rangle$ allora la retta $\langle 0\, B_3' \rangle$ ha l'equazione

(6) $$y = -mx + 1 + m .$$

Quindi il punto A_3' ha coordinate

(7) $$\begin{cases} x = \dfrac{1+m-q}{2m} \\ y = \dfrac{1+m+q}{2} \end{cases} .$$

Dalle (5) e dalle (3) si trae

(8) $$\begin{cases} t_1 t_2 = -1/m \quad ; \quad t_1 + t_2 = -q/m \\ 1/t_1 t_2 = -m \quad ; \quad 1/t_1 + 1/t_2 = q \end{cases}$$

Pertanto dalle (7) si trae

(9) $$A_3' = \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left\{1 + t_1 + t_2 - t_1 t_2\right\} \\ y = \dfrac{1}{2}\left\{1 + \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1 t_2}\right\} \end{cases}$$

Costruiamo la matrice S, della quale diamo la 1ª riga; le altre si ottengono circolando sugli indici 1, 2, 3;

(10) $$S = \left\| 1+t_1+t_2-t_1t_2 \quad 1+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1t_2} \quad 2 \right\|$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Si ha

(11) $$1+t_1+t_2-t_1t_2 = 2-(1-t_1)(1-t_2)$$

$$1+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1t_2} = 2-\left(1-\frac{1}{t_1}\right)\left(1-\frac{1}{t_2}\right)$$

Quindi il determinante della S è uguale al determinante della S' data da

(12) $$S' = \left\| (1-t_1)(1-t_2) \quad \left(1-\frac{1}{t_1}\right)\left(1-\frac{1}{t_2}\right) \quad 2 \right\|$$

$$\ldots \quad \text{Ec.} \quad \ldots$$

Calcoliamo i ~~minori~~ complementi algebrici rispetto agli elementi della III colonna:

10 25 91 M

Si ha

$$(13) \quad S_{33} = (1-t_1)(1-t_2)(t_2-1)(t_3-1)/t_2 t_3 -$$
$$- (1-t_2)(1-t_3)(t_1-1)(t_2-1)/t_1 t_2$$
$$= (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)\left\{ -\frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_1 t_3} + \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_1 t_2} \right\}$$

Da qui è evidente che si ha, ciclando sugli indici.

$$(14) \quad S_{13} + S_{23} + S_{33} = 0$$

QED.

Osservazione. L'intervento essenziale dell'Algebra maschera completamente la sostanza geometrica del problema.

Ovviamente, se M, N sono i punti-cerchio la γ è una circonferenza, ed A'_3 è il piede della perpendicolare mandata da O sul lato $\langle A_1 A_2 \rangle$.